Проблемы учёта случайных и систематических погрешностей в прямых многократных измерениях

Л.В. Ефремов,
доктор технических наук

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

Настоящая статья направлена на совершенствование методов учёта случайных и систематических погрешностей при оценке точности и метрологической надёжности средств измерений (СИ) по результатам прямых многократных измерений, получаемых в виде выборки случайных величин X_i объёмом N.

Анализ методов оценки точности измерений по метрологическим стандартам

В метрологических стандартах [1, 2 и др.] оценка точности измерений сводится к расчёту доверительных границ (ДГ) Δ_P при двусторонней вероятности p, которые накрывают область $X_{\text{в, н}}$ расположения математического ожидания результатов измерений $X_{\text{ср}}$. Это выражение можно записать, например, в таком виде:

$$X_{\text{в, н}} = \mathrm{X}_{\text{ср}} \pm \Delta_p \text{ при } p = 95\%\,. \qquad (1)$$

В ГОСТ 8.207–76 [1] для так называемых "исправленных результатов" наблюдений используется среднее квадратическое отклонение среднего арифметического результата измерений $\sigma_{sr} = \sigma/\sqrt{N}$ (где σ – среднее квадратическое отклонение выборки (СКО)), когда ДГ рассчитывается с учётом коэффициента Стьюдента t (p, N) по формуле (2,*а*).

$$\Delta_p = t\,(p, N)\,\sigma_{\text{sr}} = t\,(p, N)\,(\sigma/\sqrt{N}\,); \qquad (2,a)$$

$$\Delta_p = K_p \sigma_{\text{сл}} = K_p u_A\,. \qquad (2,б)$$

Из формулы (2,*а*) и рис. 1 следует, что с увеличением объёма выборки N доверительные границы сужаются, хотя само распределение выборки остаётся неизменным. Такой метод не пригоден для оценки надёжности СИ и не создаёт доверия к расчётной величине Δ_p, поскольку при включении в документацию ДГ не сопровождаются данными о методике расчёта и об объёме выборки.

В Р 50.2.038–2004 [2] этот способ расчёта ДГ откорректирован так, как показано в формуле (2,*б*), где совершенно правильно вместо σ_{sr} используется случайная погрешность $\sigma_{\text{сл}}$ или, что одно и то же, стандартная неопределённость u_A по типу A, которые принимаются равными СКО выборки σ и умножаются на коэффициент охвата K_p.

Следующие замечания относятся к методу расчёта случайной погрешности $\sigma_{\text{сл}}$ и стандартной неопределённости $u_A = \sigma_{\text{сл}}$ по формуле (3) путём суммирования их составляющих, полученных из различных источников.

$$\sigma_{\text{сл}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2}\,,\quad u_A = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} u_j^2}\,,\quad u_A = \sigma_{\text{сл}}\,, \qquad (3)$$

где u_j и σ_j – j-е слагаемые стандартной неопределённости измерений и СКО; j – номер слагаемых выборок; m – число источников случайных погрешностей. Такой способ вполне корректен, но его не применяют при поверках СИ, поскольку исследование факторов, влияющих на СКО, выходит за рамки выполнения прямых многоразовых измерений. Обычно при поверках СИ приходится иметь дело только с одной выборкой измерений.

Основные вопросы и сомнения возникают по поводу учёта в метрологических стандартах [1, 2 и др.] систематической погрешности. Дело в том, что в стандарте рассматриваются 2 варианта расчёта ДГ. Первый вариант относится к строгому указанию об исключении систематической погрешности из результатов наблюдения с последующим расчётом ДГ

Ключевые слова: метрологическая надёжность СИ; оценка точности измерений; случайная погрешность; неисключённая систематическая погрешность; прямые измерения; доверительные границы; стандартная неопределённость; запас метрологической надёжности

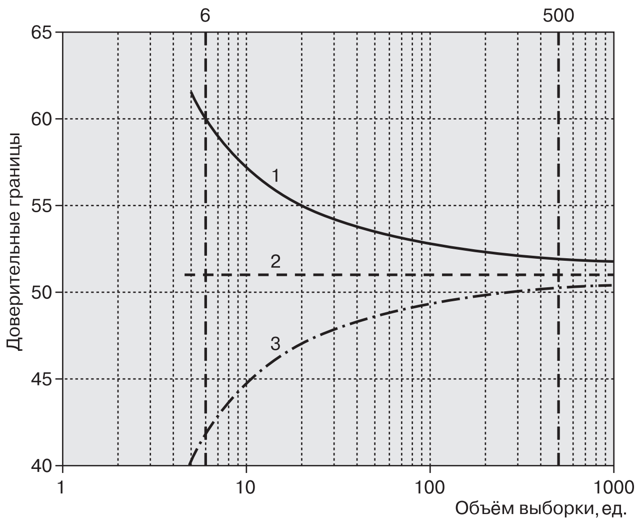

Рис. 1
Зависимость доверительных границ средней погрешности от объёма выборки:
1 и 3 – нижняя и верхняя границы соответственно; 2 – математическое ожидание

для “исправленных результатов” на основе формул (2,*а*) или (2,*б*), учитывающих только случайную погрешность. Второй вариант расчёта ДГ относится к так называемой неисключённой систематической погрешности (НСП). Интересно отметить, что в этих стандартах величина НСП сама по себе вообще не вводится, а задаётся в виде неких составляющих границ отклонений $\pm\Theta_j$ нескольких НСП, которые должны подчиняться равномерному распределению. Общую границу отклонения Θ предлагается рассчитывать путём суммирования составляющих дисперсий по формуле:

$$\Theta_{сл} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \Theta_j^2}\ . \qquad (4)$$

На основании расчёта Θ стандартная неопределённость, оцениваемая по типу B, определяется по известной формуле для равномерного распределения:

$$u_B = \Theta \Big/ \sqrt{3}\ . \qquad (5)$$

Для того чтобы выбрать вариант расчёта доверительных границ НСП, в стандартах предлагается рассчитывать и тестировать отношение Θ/σ следующим образом. Если $\Theta/\sigma < 0{,}8$, то выбирают вариант, когда НСП или стандартной неопределённостью, оцениваемой по типу B, пренебрегают и принимают в качестве погрешности или неопределённости результата измерения доверительные границы случайных погрешностей или расширенную неопределённость для уровня доверия p, вычисляемую по формуле $D_p = k_0 u_A$. Если $\Theta/\sigma > 8$, то выбирают другой вариант, когда случайными погрешностями или стандартной неопределённостью, оцениваемой по типу A, пренебрегают и принимают в качестве погрешности или неопределённости результата измерения границы НСП или расширенную неопределённость для уровня доверия p, вычисляемую по формуле $\Delta_p = k_0 u_B$. Для случая $0{,}8 < \Theta < 8$ в стандарты включена эмпирическая формула расчёта доверительных границ, которая здесь не приводится.

При рассмотрении указанной методики наибольшие сомнения возникают по поводу трактовки термина НСП и методов оценки ее границ. В стандартах не даётся чёткой формулировки этого понятия. Лишь в ГОСТ 8.207–76 имеется следующее невнятное разъяснение: “В качестве границ составляющих НСП принимают, например, пределы допускаемых основных и дополнительных погрешностей средств измерений, если случайные составляющие погрешности пренебрежимо малы”. Что это означает и как эти указания применить на практике – не ясно, поскольку допускаемые погрешности задаются поставщиком прибора, а не определяются путём многократных измерений. Спорным является и вопрос выбора для оценки границ НСП равномерного распределения.

Тем не менее многолетняя практика использования рассмотренных стандартов не даёт оснований официально отказываться от их применения, однако они подходят лишь только для оценки точности измерений. Для изучения метрологической надёжности эти документы не пригодны.

Приведённые в этом разделе замечания отражают субъективные представления автора статьи о методах обработки результатов многократных измерений. Далее они будут использованы для обоснования альтернативных способов оценки как точности, так и метрологической надёжности СИ.

Альтернативный способ оценки точности и метрологической надёжности СИ по результатам прямых многократных измерений

В монографии [3] и в этой статье кроме проблемы точности рассматривается ещё одна важная задача контроля метрологической надёжности СИ по критерию односторонней вероятности β недостижения предела погрешности $h_{пп}$. Основное отличие этой задачи от оценки точности по правилам стандартов [1, 2] заключается в том, что объектом исследования становится выборка не результатов измерений X_i, а самих погрешностей h_i, определяемая по очевидной формуле:

$$h_i = X_j - X_о, \tag{6}$$

где $X_о$ – опорное значение измеряемой величины.

Тогда, в отличие от рассмотренных выше стандартов, появляется возможность на основании ГОСТ Р ИСО 5725-1-2002 [4] утверждать, что систематическая погрешность $h_{сп}$ – это разность между математическим ожиданием результатов измерений $X_{ср}$ и истинным (или в его отсутствие – принятым опорным) значением $X_о$, которое при поверках генерируется соответствующим эталоном.

Важно ещё показать, что систематическая погрешность $h_{сп}$ в то же время является средней погрешностью измерений $h_{ср}$ (см. выражение (7)), а случайная погрешность $\sigma_{сл}$ определяется по известной формуле (8) для расчёта СКО. Из (8) следует, что выборки результатов измерений X_i и погрешностей h_i имеют общую случайную погрешность $\sigma_{сл}$, что, по-видимому, также не было учтено в стандартах [1, 2].

$$h_{сп} = h_{ср} = \frac{\sum_{i=1}^{N} h_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - X_0)}{N} = X_{ср} - X_0\ . \tag{7}$$

$$\sigma_{сл} = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - X_0)}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}[(X_i - X_0) - (X_{ср} - X_0)]^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(h_i - h_{ср})^2}{N-1}}\ . \tag{8}$$

С учётом приведённых выражений можно непосредственно из формулы (1) получить формулу (9) для расчёта доверительного интервала $X_{в,\,н}$ с учётом как систематической, так и случайной погрешностей без необходимости использования понятия НСП и введения для неё каких-либо дополнительных ДГ:

$$X_{в,\,н} = X_{ср} \pm \Delta_p = X_о \pm h_{ср} \pm \Delta_p = X_о + (h_{сп} \pm k_о\sigma_{сл}). \tag{9}$$

$$h_{в,\,н} = X_{в,\,н} - X_о = X_о + (h_{сп} \pm k_о\sigma_{сл}) - X_о = h_{сп} \pm k_о\sigma_{сл}. \tag{10}$$

Отсюда легко перейти к доверительному интервалу погрешности $h_{в,\,н}$ путём смещения распределения выборки на опорную величину $X_о$ по формуле (10).

Таким образом, мы подошли к исходной позиции обоснования методики оценки метрологической надёжности, когда метрологический отказ рассматривается как событие превышения фактической погрешности h (по модулю) её предела $|h_{пп}|$ (также по модулю). Модули здесь применяются для того, чтобы учесть равноценную возможность нахождения погрешности как в положительной, так и в отрицательной зоне её шкалы. Тогда условие обеспечения метрологической надёжности СИ формулируется следующим образом: "верхняя доверительная граница $h_в$ не должна превышать модуль предела погрешности $|h_{пп}|$ с заданной вероятностью β, что соответствует выражению:

$$|h_{пп}| \geq h_в = |h_{сл}| + Z_\beta\sigma_{сл}. \tag{11}$$

где Z_β – квантиль нормального распределения односторонней вероятности β, которая зависит от двухсторонней вероятности p согласно формуле $\beta = 1 - (1 - p)/2$.

Теперь, наконец, можно из выражения (11) получить искомое выражение (12) для решения важнейшей обратной задачи – расчёта запаса метрологической надёжности (ЗМН), который представляет собой квантиль Z_β нормального распределения вероятности β недостижения предела погрешности $h_{пп}$:

$$Z_\beta = \frac{|h_{пп}| - |h_{сп}|}{\sigma_{сл}} \Rightarrow \beta = cnorm\,(Z)\ . \tag{12}$$

Критерий ЗМН [3, 5, 6 и др.] позволяет объективно оценивать метрологическую надёжность СИ путём сравнения фактической вероятности β или, что равноценно, фактического запаса надёжности Z_β с их допустимыми значениями, которые в частности можно выбрать в зависимости от назначения СИ [3]. В той же монографии [3] приведены примеры эффективного использования ЗМН при выполнении первичных и периодических поверок СИ с учётом деградации их состояния и при решении многих других задач. В частности показано, как изменяется ЗМН при увеличении систематической погрешности от нуля до своего предела и как рассчитать ЗМН при нулевой случайной погрешности. Известное правило трёх сигм является частным случаем концепции ЗМН, а коэффициент охвата в теории неопределённости есть не что иное, как допустимый ЗМН $Z_{\beta.д} \approx 2$ (точнее, $Z_{\beta.д} = 1{,}96$) при $p \approx 95\%$ ($\beta \approx 97{,}5\%$).

Возвращаясь к проблеме оценки точности измерений, необходимо ещё раз отметить, что при выполнении прямых многократных измерений получают только одну выборку результатов измерений X_i и связанную с ней выборку погрешности h_i по формуле (6). Доказано [3 и др.], что при исследовании выборки погрешностей, которые являются относительно малыми величинами, целесообразно использовать симметричный нормальный закон Гаусса. Функция этого распределения (12) в общем случае имеет параметр смещения $h_{сп}$ (bias), который и есть систематическая погрешность. В частном случае $h_{сп} = 0$, что совпадает по смыслу с понятием “исправленные результаты наблюдений“. На рис. 2 видно, как смещаются графики распределения вероятности $\beta(h)$ и плотности распределения $f(h)$ на величину $h_{сп}$ относительно нулевой систематической погрешности, что приводит к изменению вероятности недостижения предела погрешности β.

По поводу применения равномерного распределения для расчёта доверительных границ можно сказать [3], что это решение не является желательным с точки зрения надёжности СИ. Усечённое равномерное распределение имеет верхнюю границу, выше которой вероятность всегда будет равна 1, что не соответствует практике, если вспомнить такие невероятные события, как катастрофа в Чернобыле. У равномерного распределения точка перелома функции для вероятности $\beta = 1$ образуется при $\sigma\sqrt{3} = 1{,}732\,\sigma$. Согласно правилу трёх сигм это значительно меньше допустимого диапазона случайной величины, а при $Z_\beta = 1{,}732$ для нормального закона распределения вероятность $\beta = 0{,}957$.

Кроме того, у одной и той же выборки размах и СКО взаимосвязаны, и рекомендованные (см. первый раздел статьи) отношения Θ/σ не всегда достижимы. Это положение иллюстрирует таблица, полученная путём статистического моделирования выборок разного объёма М = ~~4, 30, 100 и 600~~ при разных коэффициентах вариации погрешности V ~~(0,1...1)~~. С помощью генератора случайных чисел (в редакторе MathCAD) рассчитывались параметры распределения нормального и равномерного закона с оценкой коэффициента корреляции относительно эмпирического распределения. Было установлено, что на изменение этих показателей в основном влияет объём выборки, а не величина СКО.

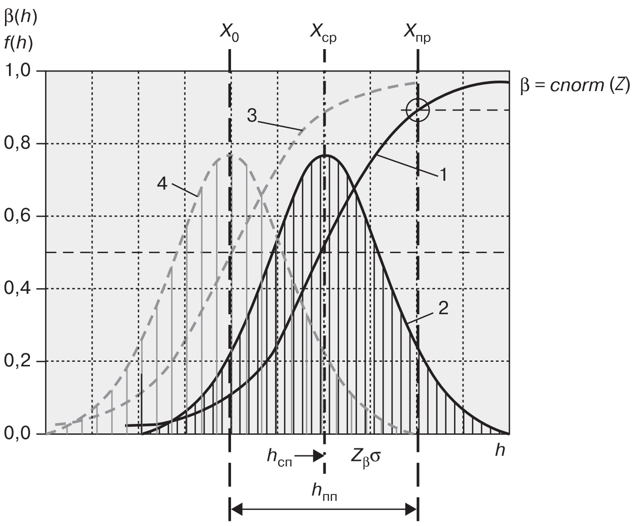

Рис. 2
Формирование доверительных границ при нормальном распределении: $X_о$, $X_{ср}$ и $X_{пр}$ – опорная, средняя и предельнодопустимая измеряемые величины; 1 и 2 – функции распределения вероятности $\beta(h)$ и плотности распределения $f(h)$ при систематической погрешности $h_{сп} = X_{ср} - X_о$; 3 и 4 – то же, при систематической погрешности $h_{сп} = 0$

Можно согласиться с тем, что возникновение систематической погрешности – явление негативное, но её обнаружение и устранение в большей мере техническая, а не математическая задача. Собственно говоря, для этого и предназначены поверки СИ, цель которых заключается в обнаружении (по формуле (12)) и последующем устранении или уменьшении случайной погрешности путем юстировки СИ.

Результаты статистического моделирования параметров погрешности прямых многократных измерений

Объём выборки	Отношение Θ/σ_Σ	Коэффициент корреляции
4	0,611	0,023
15	0,864	0,456
50	1,095	0,829
100	1,228	0,921
1000	1,67	0,995

Анализ методов проверки гипотез о принадлежности результатов наблюдений соответствующему закону распределения вероятности

В заключение целесообразно упомянуть ещё об одной проблеме, которая отражена в рассмотренных стандартах. В ГОСТ 8.207–76 [1] для проверки принадлежности измерений к нормальному закону рекомендуется: при числе результатов наблюдений $n > 50$ использовать один из критериев: χ^2 Пирсона или ω^2 Мизеса – Смирнова; при числе результатов наблюдений $50 > n > 15$ использовать специальную методику (см. приложение 1 к стандарту [1]); при числе результатов наблюдений $n \le 15$ принадлежность их к нормальному распределению не проверяют и вопрос решается на основании ранее выполненных исследований.

В принципе с этими рекомендациями можно согласиться, хотя для решения той же задачи созданы более простые и эффективные методы. В работах [3, 7] согласие любых теоретических законов с эмпирическим распределением проверяется на основе расчётов коэффициента корреляции одновременно с расчётом параметров распределения. Кстати, самый простой случай относится к нормальному закону, поскольку параметры смещения $a = X_{\text{ср}}$ и формы $b = \sigma$ являются постоянными членами линейных уравнений регрессии для квантилей распределения вероятности и плотности распределения. При проверке согласия других законов обычно приходиться применять более сложные преобразования (анаморфозы) для приведения уравнений к линейному виду [7].

В редакторе MathCAD предусмотрены операторы вида $K_{xy} = \mathrm{corr}\,(Y_i,\, Y\,(X_i))$ для расчёта коэффициента корреляции между эмпирическими распределениями вероятности $Y_i = \beta_i$ или плотности распределения $Y_i = f_i$ и их расчётными функциями $Y(X_i) = \beta(X_i)$ и $Y(X_i) = f(X_i)$ соответственно.

Многолетний опыт статистических расчётов показывает, что более высокая корреляция наблюдается у функций распределения накопленной вероятности $\beta(X)$. У плотности распределения $f(X)$ корреляция обычно хуже, но зато она в большей мере чувствительна к качеству выборки и особенно к её объему. Это позволило наглядно показать, что надёжно обосновать соответствие выборки нормальному закону можно только при больших объёмах выборки (больше 100), когда коэффициент корреляции превышает 0,94. При малых выборках (например, меньше 15) коэффициент корреляции становится недопустимо низким (меньше 0,5). Эта закономерность отражена в 3-м столбце таблицы (см. с. 55) и на рис. 3, где приведены примеры графиков плотности распределения из расчётов средствами редактора MathCAD. Отсюда следует ещё одно замечание относительно популярной практики поверок СИ в объёме 3...6 измерений. Исходя из сказанного, можно считать правомерными измерения со столь малыми выборками и даже одобрить концепцию стандарта [2] о допустимости выполнения однократных измерений (но лишь при условии определения СКО или стандартной неопределённости по типу A) путём предварительных испытаний СИ одного и того же типа при больших выборках многократных измерений. Такой принцип рекомендован в работе [3] для поверок при оценке ЗМН по формуле (12). При определённых условиях входящую в формулу случайную погрешность $\sigma_{\text{сл}}$ рекомендовано считать постоянной величиной, ранее определённой при больших выборках во время испытаний типовых образцов или при первичных поверках. Тогда появляется возможность периодические поверки ограничить малыми выборками. При этом не составляет проблемы контролировать тренд изменения систематической пог-

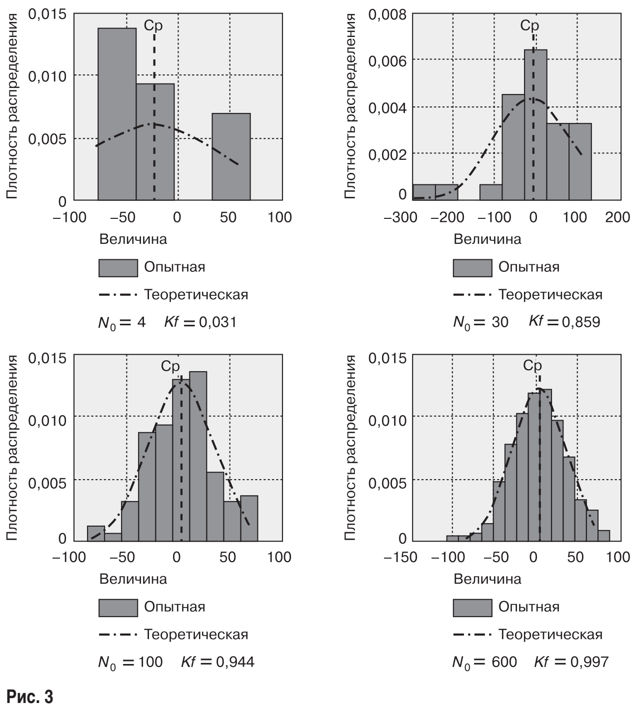

Рис. 3
Примеры гистограмм и функций плотности распределения при разных объёмах выборки $N_о$: Kf – коэффициент корреляции

решности даже при $\sigma_{сл} \approx 0$, что часто наблюдается у простейших СИ.

Тогда случайную погрешность можно принять постоянной величиной, равной $\sigma_{сл} = h_{пп}/Z_{\beta,B}$, где $Z_{\beta,,B}$ – верхний уровень ЗМН, величина которого обычно ≥ 6, что соответствует $\beta = 0{,}999999 \approx 1$ для случая $h_{сп} \approx 0$. По мере увеличения $h_{сп}$ ЗМН будет снижаться согласно закону (12). Достижение нижней нормативной границы $Z_{\beta,H}$ (например, равной 2 или 3) является признаком необходимости выполнения поверки или калибровки СИ.

***

Таким образом, критический анализ метрологических документов [1] и [2] позволил выразить сомнения относительно концепции использования и оценки доверительных границ для неисключённых систематических погрешностей на основе равномерного распределения. Путём перехода от выборок измерений к выборкам погрешностей обоснована альтернативная методика расчёта как доверительных границ погрешности, так и запаса метрологической надёжности СИ с применением нормального закона распределения. Даны рекомендации расчёта этих показателей по результатам многократных измерений при малых выборках и при нулевой случайной погрешности.

Литература

1. ГОСТ 8.207–76. Государственная система обеспечения единства измерений. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения.
2. Р 50.2.038–2004 ГСИ. Измерения прямые однократные. Оценивание погрешностей и неопределённости результата измерений.
3. Ефремов Л. В. Вероятностная оценка метрологической надёжности средств измерений: алгоритмы и программы. – СПб: Нестор-История, 2011.
4. ГОСТ Р ИСО 5725-1-2002. Точность (правильность и прецизионность) методов и результатов измерений. Ч. 1: Основные положения и определения.
5. Ефремов Л. В. Запас метрологической надёжности как критерий оценки исправности средств измерений // Изв. вузов. Приборостроение. – 2010. – Т. 53, № 7. – С. 51–54.
6. Ефремов Л. В. Оценка интервалов между калибровками с учётом запаса метрологической надёжности средств измерений // Изв. вузов. Приборостроение. – 2010. – Т. 53, № 12. – С. 34–40
7. Ефремов Л. В. Практика вероятностного анализа надёжности техники с применением компьютерных технологий. – СПб: Наука, 2008.