Фундаментальные проблемы теории точности. Коллектив авторов / Под ред. В. П. Булатова, И. Г. Фридлендера. — СПб.: Наука, 2001. — 504 с, 105 ил.
ISBN 5-02-024947-5
В монографии представлены фундаментальные положения, концепция, проблематика теории точности; интеграция теории точности в систему базовых теорий современного естествознания; роль теории точности как ядра проблемы качества продукции в техническом обеспечении точности и надежности изделий на стадиях проектирования, изготовления и эксплуатации.
Книга рассчитана на научных сотрудников, специалистов промышленных предприятий и отраслевых НИИ, а также на преподавателей, аспирантов и студентов технических университетов.

Глава 5. ОЦЕНКА КРИТЕИЕВ СОГЛАСИЯ И ПАРАМЕТРОВ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО И ЭМПИРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ТЕОРИИ ТОЧНОСТИ[1]

Введение

При исследовании вероятностных характеристик качества любой продукции центральное место занимает выбор и оценка параметров таких теоретических распределений (законов распределений), которые находятся в наилучшем согласии с эмпирическими распределениями вероятности исследуемых величин.
В теории точности эту проблему обычно рекомендуют решать на основе нормального закона распределения. Однако, как показано в работе [10], его кажущая универсальность переоценивается и не может быть признана корректно обоснованной.
В той же работе [10] предложена так называемая универсальная нормальная функция плотности вероятности, достаточно сложная для практического применения. Предлагаемая для ее использования программа на языке FORTRAN-IV явно устарела, поскольку на смену громоздким ЕСЭВМ пришли ПЭВМ, имеющие совершенно другие принципы программирования математических задач.
Между тем задачи выбора и оценки параметров теоретических распределений давно и успешно решаются в теории и практике исследований надежности техники, которые, в свою очередь, базируются на основных положениях теории вероятности и математической статистики.
В этом разделе монографии дается обзор и анализ методов оценки параметров теоретических распределений по исходным данным о выборках случайных величин и излагается прогрессивная технология решения этой задачи на основе метода наименьших квадратов (МНК). Эта технология

разработана применительно к задачам надежности техники [5], [8] и она может быть рекомендована для решения других задач теории точности.
В рассматриваемой методике полностью решена проблема определения параметров распределений для усеченных и многократно усеченных (цензурированных) выборок.
Наряду с методикой в этой работе показан пример ее использования для расчетов параметров распределений на персональных ЭВМ.
Целесообразно отметить, что с появлением мощных персональных компьютеров на смену индивидуальному программированию на таких алгоритмических языках как Фортран, Бейсик или Паскаль пришли математические системы в среде Windows, удобные для быстрых расчетов любых математических задач. К таким системам можно отнести MatLAB, Mathematica 2, 3 и 4, Maple V и др.
Среди них особое место занимают системы MathCAD. Они позволяют выполнять как численные, так и символьные вычисления, имея чрезвычайно удобный математико-ориентированный интерфейс и прекрасные средства графики. Новейшие системы MathCAD (14 версия, выпущенная корпорацией PTS в 2007 году) постепенно получают статус международного стандарта математического анализа для всех сфер науки и техники. Поэтому приводимые здесь примеры расчетов по рассматриваемой методике выполнены в нами именно в математической системе MathCAD.

Обзор методов оценки параметров теоретических распределений по исходным данным о выборках случайных величин

Приступая к обзору и анализу методов статистической обработки информации следует отметить, что в литературе по этой проблеме еще не установился единый подход к терминам и определениям. Это следует из таблицы 1, где приведены термины, используемые в этой работе при описании эмпирических распределений, и соответствующие им альтернативные термины из теории вероятности.
Теория вероятностей предлагает много законов распределений, но лишь некоторые из них применяются для практических расчетов показателей качества [12].
К таким законам можно отнести следующие непрерывные двухпараметрические распределения:
– нормальное распределение (распределение Гаусса);
– логарифмически нормальное распределение (далее – логнормальное распределение);
– равномерное распределение;
– распределение Вейбулла.

Кроме того, в расчетной практике широкое распространение получили два однопараметрических распределения, которые являются частными случаями распределения Вейбулла [5]. Это экспоненциальное распределение (при постоянном коэффициенте вариации $\boldsymbol{V} = 1$) и распределение Релея (при постоянном коэффициенте вариации $\boldsymbol{V} = 0{,}523$).
Двухпараметрические распределения зависят от двух параметров – масштаба $\boldsymbol{a}$ и формы $\boldsymbol{b}$, которые связаны с моментами 1-го и 2-го порядка выборки или, что то же самое - со средним значением $\boldsymbol{t_s}$ и коэффициентом вариации $\boldsymbol{V}$.

Таблица 1.

Используемый термин	Альтернативные термины
Выборка	Выборочная совокупность
Ранжированная выборка	Вариационный ряд, ранжированный ряд
Член выборки	Выборочное значение, варианта (для ранжированного ряда)
Эмпирическая плотность вероятности	Относительная частота
Безразмерная плотность вероятности	Частость или относительная частота в интервале
Эмпирическая интенсивность отказа	нет
Безразмерная интенсивность отказа	нет
Среднее арифметическое, математическое ожидание	Выборочное среднее, статистическое среднее, средневзвешенное
Дисперсия	Выборочная дисперсия, статистическая дисперсия
Среднее квадратичное отклонение	Выборочное среднее квадратичное отклонение, выборочное стандартное отклонение, выборочный стандарт
Эмпирическая функция распределения вероятности отказов (событий)	Статистическая функция распределения, кумулятивная кривая, функция накопленных частостей
Эмпирическое распределение вероятности (безотказной работы)	Кривая убыли, функция надежности
Эмпирическое распределение плотности вероятности	Гистограмма интервального вариационного ряда или полигон относительных частот

В табл. 2 приведены функции указанных распределений от наработки t. В эту таблицу занесены функции: вероятности безотказной работы $P(t)$, плотности вероятности *f(t)*, интенсивности отказов λ(t), а также функция гамма- процентного ресурса *R(γ)*, которая является обратной по отношению к основной функции *P(t)*.

У однопараметрических распределений (табл. 3) имеется только один параметр – параметр масштаба ***a***. Параметр формы этих распределений, определяемый функцией закона Вейбулла, ***b*** = *const*. Для распределения Релея ***b*** = 2, а для экспоненциального распределения ***b*** = 1.

Если в двухпараметрические распределения ввести еще один параметр ***C*** - параметр смещения, то можно получить соответствующие трехпараметрические распределения. Тогда появляется возможность «подгонять» любое теоретическое распределение к эмпирическому распределению с минимальной погрешностью , но при этом пропадает связь между их статистическими параметрами. Поэтому применение трехпараметрических распределений здесь не рассматривается.

В этой работе в качестве случайной величины используется время ***t,*** , поскольку при изучении надежности в большинстве случаев используется именно этот измеритель наработки.

В случае исследования выборок других случайных величин пригодны все рассматриваемые здесь формулы и методы. Для этого достаточно заменить во всех формулах обозначение случайной величины ***t*** на ***x*** (или на любое другое).

В общем случае технология решения поставленной задачи состоит из следующих операций:

1) ранжирование исходного статистического материала, полученного в виде одной или нескольких выборок случайных величин t_i,
2) анализ однородности и корректировка статистического материала,
3) построение эмпирического распределения вероятности,
4) оценка параметров теоретических распределений,
5) проверка согласия эмпирических и теоретических распределений и выбор закона,
6) оценка искомых показателей надежности (или точности) с учетом или без учета доверительных границ.

Наличие всех указанных операций при решении конкретных статистических задач не обязательно.

В простейшем случае (который не является предметом рассмотрения этой работы), когда решается задача о математическом ожидании простой выборки, достаточно выполнить операции 1 и 2, после чего оценивается математическое ожидание $t_{ср}$, дисперсия σ^2 и доверительные границы диапазона $t_н \div t_в$ в которые попадает $t_{ср}$ в зависимости от заданной доверительной

Таблица 2. Функции основных двухпараметрических законов распределений

Законы распределения	Функции			
	P(t)	***f(t)***	***λ(t)***	***R(γ)***
Нормальный	$1-\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\left(\frac{1-\frac{t}{a}}{2b^2}\right)^2}dt$	$\frac{1}{ab\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{\frac{t}{a}-1}{2b^2}\right)^2}$	$\frac{f(t)}{P(t)}$	Определяется через квантиль U_γ для $\gamma_{доп}$ $a(1-U_\gamma b)$
Логнормальный	$1-\frac{1}{\ln a\sqrt{2\pi}}\int_0^{\ln t} e^{-\left(\frac{\frac{\ln a}{\ln t}}{2b^2}\right)^2}d(\ln t)$	$\frac{1}{b\ln t\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{\frac{\ln t}{\ln a}-1}{2b^2}\right)^2}$	$\frac{f(t)}{P(t)}$	Определяется через квантиль U_γ для $\gamma_{доп}$ $a\exp(-U_\gamma b)$
Вейбулла	$e^{-(\frac{t}{a})^b}$	$P(t)f(t)$	$\frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1}$	$a\left(\ln(\frac{1}{\gamma_{доп}})\right)^{\frac{1}{b}}$
Равномерный*	$\frac{d-t}{d-c}$	$\frac{1}{d-c}$	$\frac{1}{d-t}$	$d-\gamma_{доп}(d-c)$

Примечание. * В Формулах для равномерного распределения применены постоянные ***c*** (нижняя граница распределения) и ***d*** (верхняя граница распределения), а параметры ***a*** и ***b*** можно рассчитать по соответствующим Формулам.

Таблица 3. Функции основных однопараметрических законов распределений

Законы распределения	Функции			
	P(t)	**f(t)**	**λ(t)**	**R(γ)**
Экспоненциальный	$e^{-\frac{t}{a}} = e^{-\lambda t}$	$P(t)f(t)$	$\frac{1}{a}$	$a \ln \frac{1}{\gamma_{доп}}$
Релея	$e^{-(\frac{t}{a})^2}$	$P(t)f(t)$	$\frac{2}{a^2}t$	$a\left(\ln(\frac{1}{\gamma_{доп}}) \right)^{\frac{1}{2}}$

вероятности β и объема выборки ***N.*** При этом не требуется решать вопрос о законе распределения.

В большинстве других задач, связанных с оценкой вероятностных характеристик точности и достоверности результатов измерений или наблюдений, вычисления по всем остальным операциям (от 2 до 6) как правило должны выполняться.

Рассмотрим основные операции статистического анализа выборок более подробно.

Ранжирование исходного статистического материала.

Случайные числа, которые получают путем последовательных измерений или наблюдений обычно образуют хаотичную выборку. Это не позволяет сразу приступить к выполнению следующей операции статического анализа и построить эмпирическое распределение. Поэтому подготовка полученного статистического материала приходиться начинать с его ранжирования, т.е. перестановки членов по принципу возрастания от минимального члена к максимальному.

При большом объеме выборки эта простая операция требует больших затрат времени. При компьютерной обработке эта задача решается моментально с использованием достаточно простой подпрограммы или специальных операторов. Например в системе MathCAD используется оператор ***sort(M)***, который возвращает вектор М с величинами, отсортированными в возрастающем порядке.

Анализ однородности исходного статистического материала.

Чаще всего такая задача решается для того, чтобы отсеять резко выделяющиеся крайние члены выборки, которые могли появиться при нарушении правил эксплуатации или условий испытаний.

При решении этой задачи широкое распространение получил метод Ирвина [12], который заключается в следующем.
Для проверки гипотезы о необходимости отбрасывания наименьшего первого члена t_1 выборки рассчитывается коэффициент α_1 по формуле

$$\alpha_1 = \frac{t_2 - t_1}{t_N - t_1} \qquad (1)$$

Для проверки гипотезы о необходимости отбрасывания наибольшего последнего члена выборки t_N рассчитываем коэффициент αN по формуле:

$$\alpha_N = \frac{t_N - t_{N-1}}{t_N - t_1} \qquad (2)$$

Полученные значения α_1 и α_N необходимо сравнить с коэффициентами 95-процентного и 99-процентного уровней достоверности (α_{95} и α_{99}), которые определяются по специальным таблицам [16]. Корреляционный анализ этих таблиц позволил получить следующие формулы :

$$\alpha_{95} = \frac{1{,}3}{\sqrt{N-1}} \qquad (4)$$

$$\alpha_{99} = \frac{1{,}7}{\sqrt{N-1}}. \qquad (5)$$

Гипотеза подтверждается и проверяемый член исключается из выборки, если α_1 и (или) $\alpha_N > \alpha_{99}$. Гипотеза не подтверждается, а проверяемый член не исключается из выборки, если α_1 и (или) $\alpha_N < \alpha_{95}$.
Если коэффициент α_1 или α_N лежит между значениями α_{95} и α_{99}, то задача является неопределенной и решается на субъективной основе.
Задача о проверке крайних членов выборки на отсев возникает не всегда. Как будет показано ниже при определении параметров теоретических распределений с помощью эмпирических распределений этого не требуется, поскольку методика предусматривает автоматическое усечения правого «хвоста» распределения.
Анализ однородности исходного статистического материала может выполняться и для другой цели - проверки возможности объединения двух и более выборок в одну общую для дальнейших расчетов.
Анализ однородности нескольких выборок производят тогда, когда исходные данные получены при различных условиях испытаний или в разное время. При этом желательно иметь предположение о законе распределения исследуемых выборок.
Если вид распределения выбрать затруднительно, то рекомендуется провести предварительную проверку согласия экспериментального и теоретического распределений для каждой выборки отдельно с каждым из предполагаемых распределений. Можно также осуществить проверку согласия, построив общую гистограмму для всех наблюдений.

Для анализа однородности [9] используются критерии: Фишера и Стьюдента, Шеффе и Ван дёр Вардена, Вилкоксона и Смирнова -Колмогорова, а так же дисперсионный анализ.
Уместно отметить, что системы MathCAD содержат стандартные программы решения всех статистических задач и в том числе - об однородности нескольких выборок.

Построение эмпирического распределения вероятности.

Эта простая на первый взгляд задача в литературе обычно подробно не рассматривается. Между тем при выполнении именно этой операции допускаются грубые ошибки, которые в конечном счете приводят к недостоверным результатам.
Например не имеется четкого ответа на вопрос об объеме выборки при котором следует либо использовать вариационный ряд, либо переходить к построению интервального вариационного ряда.
При построении эмпирических распределений по интервалам часто допускается характерная ошибка - накопленную вероятность (вероятность безотказной работы) рассчитывают для конца интервала, но ее относят к середине интервала. При очень больших выборках, например объемом $N > 500$, это не имеет существенного значения, но для выборок объемом $N < 100$ такое смещение дает заметную погрешность, соответствующую половине шага разбиения оси.
Существует два варианта определения числа и шага интервала разбиения оси абсцисс в зависимости от объема выборки N.
Первый вариант состоит в расчете числа интервалов с использованием правила Старджесса [15]

$$k = 1 + 3{,}3 \lg N , \qquad (6)$$

а по второму варианту это число рассчитывают по формуле [5]

$$k = 5 \lg N . \qquad (7)$$

Сравнительные графики этих функций, построенные на рис. 1 в системе MathCAD, позволяет отдать предпочтение второму варианту поскольку он лучше отражает преимущества увеличения объема выборки для повышения достоверности исследования.

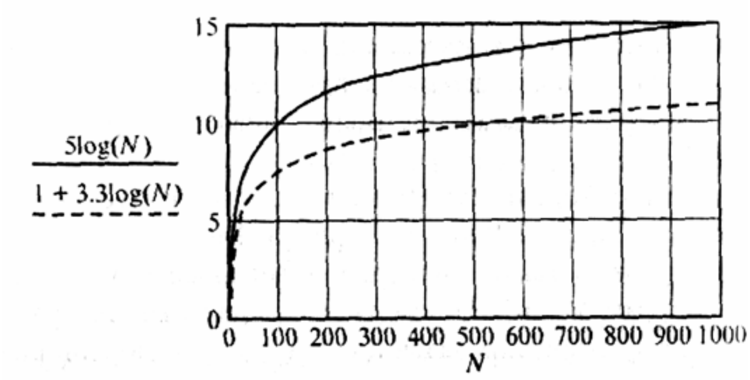


Рис.1 Сравнение вариантов расчета числа интервалов

Особое значение для практики имеет построение эмпирических распределений для усеченных и многократно усеченных (цензурированных) выборок. Речь идет о таких жизненных и производственных ситуациях, когда надо учитывать не только свершившиеся, но еще не свершившиеся события.

Например при изучении надежности судового оборудования приходиться иметь дело с изделиями разного возрастного состава из-за того, что они поступают в эксплуатацию не одновременно.

Аналогичная ситуация наблюдается тогда, когда часть исследуемых изделий снимаются с испытаний до наступления их отказа.

Тогда и возникает задача построения эмпирического распределения для цензурированной выборки. Но в литературе и документации корректного решения этой задачи не было.

Эту задачу удалось решить путем использования в качестве первичного параметра распределение интенсивности отказов λ_j.

В работе [6] эта величина определяется по формуле

$$\lambda_j = \frac{n_j}{\left(N - (n_j + n1_j)\right)\Delta t} \qquad (8)$$

где n_j и $n1_j$ - число отказавших и не отказавших изделий, попавших в интервал, N- число исправных изделий к началу периода, Δt- ширина интервала.

После этого определяется эмпирическая вероятность безотказной работы по следующей формуле (которая приводиться здесь без обнаруженной опечатки)

$$P_j(t) = \exp(-\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \Delta t) \qquad (9)$$

В следующем параграфе этой главы будет показана более полная и корректная методика построения эмпирических распределений вероятностей для выборок любого типа.

Оценка параметров теоретических распределений.

Исходными данными для определения параметров теоретического распределения являются элементы эмпирического распределения. В теории вероятностей можно найти несколько методов решения этой задачи, которые кроме того приведены и в государственных стандартах.
Метод моментов — это самый простой метод, который заключается в приравнивании теоретических моментов распределения к эмпирическим моментам соответствующего порядка. Например у нормального распределения параметр положения ***a*** равен среднему арифметическому выборки, а параметр формы ***b*** - дисперсии выборки.
У распределения Вейбулла параметр формы зависит от коэффициента вариации выборки (точнее от его обратной величины) и определяется через гамма функцию или по специальным графикам (см. рис. 2)
Параметр положения этого распределения

$$a = t_{cp}/K(b) \qquad (10)$$

где ***K(b)*** - коэффициент, который можно определить через гамма функцию

$$K(b) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) \qquad (11)$$

или по графикам на рис. 3.

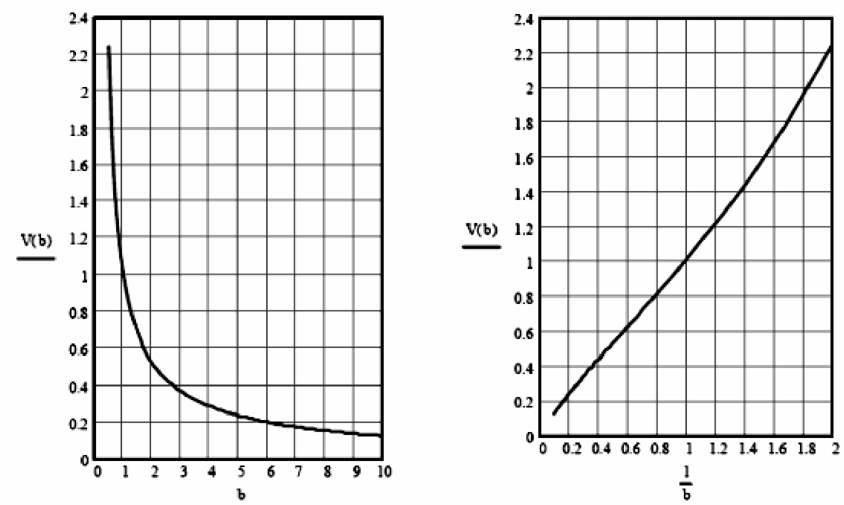


Рис. 2. Зависимость параметра формы ***b*** от коэффициента вариации ***V***

Зависимости параметров ***a*** и ***b*** от моментов двух первых порядков выборки установлены и для других двухпараметрических законов распределений.

Метод моментов можно использовать только для оценки параметров по завершенным испытаниям, так как эмпирические моменты определяют только по полным выборкам. Для усеченных и многократно усеченных выборок метод моментов не пригоден.

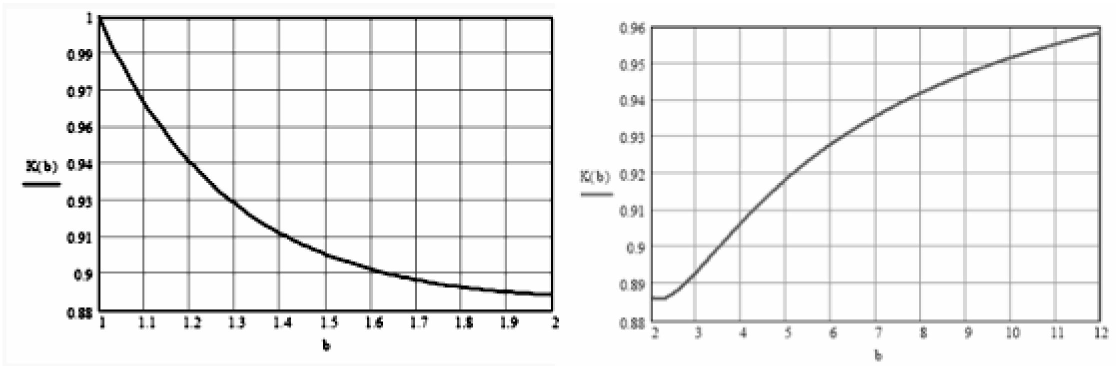


Рис. 3. Определение коэффициента ***K(b)***

Метод максимального правдоподобия (метод наибольшего правдоподобия, метод максимума правдоподобия) [2] является более точным, но и более сложным методом. Он позволяет получить оценки параметров распределения не только для полных, но и для усеченных и многократно усеченных выборок.

Для получения оценки максимального правдоподобия приравнивают нулю частные производные от логарифма функции максимального правдоподобия.

Для многократно усеченной выборки используют методику по которой ее сначала приводят к простой усеченной с помощью специальных методов (обычно с помощью метода Джонсона), а затем уже для усеченной выборки одним из возможных методов оценивают параметры распределения. Расчет ведется в табличной форме путем предварительного расчета функции правдоподобия для разных значений параметров искомого закона распределения до тех пор пока не будет достигнуто нулевое значение функции. Для сокращения времени поиска корней функции правдоподобия применяют графические построения.

Недостатком этого метода является не только его трудоемкость, но и необходимость применения процедур проверки согласия с эмпирическим распределением уже после определения параметров теоретического распределения. При этом приходиться применять графические методы, что снижает точность оценки.

Метод квантилей или разделяющих разбиений [5] заключается в том, что эмпирические квантили приравнивают к квантилям теоретического распределения и составляются столько уравнений, сколько параметров выбранного распределения необходимо определить. Для двухпараметрических распределений требуется решать уравнение с двумя неизвестными, которые составлены для двух значений вероятности $P(t_1)$ и $P(t_2)$, снятых с эмпирического распределения. Например для решения таких уравнений при логнормальном распределении следует сначала для $P(t_1)$ и $P(t_2)$ найти соответствующие им квантили U_1 и U_2, а затем рассчитать искомые параметры по формулам

$$b = \frac{\ln \frac{t_2}{t_1}}{U_2 - U_1} \qquad и \qquad a = t_2 \exp\left(bU_2\right). \qquad (12)$$

Аналогичные формулы составлены для всех двухпараметрических законов распределений [5].

По методу квантилей можно определять параметры распределения для выборок любого типа, поскольку в качестве исходных данных используются элементы эмпирического распределения. Недостатком этого метода можно считать возможную нестабильность полученных результатов из-за субъективности выбора величин $P(t_1)$ и $P(t_2)$.

Графоаналитический метод [6] с использованием вероятностной бумаги можно применять для оценки параметров распределения как для полных, так и для усеченных выборок.

При использовании графоаналитического метода можно руководствоваться ГОСТ 11.008—75, который устанавливает правила построения и применения вероятностных бумаг при статистической обработке опытных данных.

Суть метода состоит в проведении прямой линии среди опытных точек, построенных в координатах, которые соответствующим образом связаны с исследуемой функцией распределения.

Например при нормальном распределении по оси абсцисс откладывают измеряемый признак (в нашем случае t), а по оси ординат - квантиль *U(P).* При этом против засечек для квантиля записывается соответствующее ему значение вероятности *P*. Примерно так же строят вероятностную бумагу для логнормального распределения с использованием логарифмической шкалы оси абсцисс.

Зависимость *U(P)* приведены в виде табулированных функций в литературе, например в [16]. На рис. 4 приведены графики этих функций, построенные в системе MathCAD.

Построение вероятностных бумаг для распределении Вейбулла и равномерного распределений можно выполнять по формулам, которые используются при определении их параметров методом наименьших квадратов (см. следующий параграф).

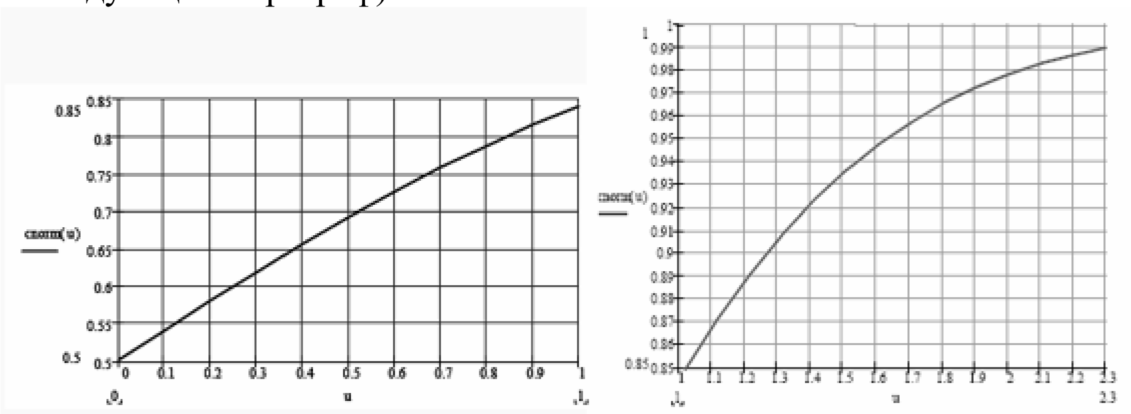


Рис. 4. Зависимость вероятности от квантиля нормального распределения (P(t) = cnorm(u))

В некоторой литературе [15] указывают на низкую точность графоаналитического метода, хотя другие авторы отдают ему предпочтение даже по сравнению с методом максимального правдоподобия.

Так в работе [6] приведены сравнительные результаты исследования многократно усеченной выборки отказов распылителей форсунок методом максимального правдоподобия и графоаналитического методом. Эти исследования позволили авторам работы сделать однозначный вывод о том, что графоаналитический метод при значительно меньшей трудоемкости вычислений и более высокой наглядности обеспечивают получение практически тех же результатов, как и при использовании метода максимального правдоподобия. Поэтому графоаналитический метод следует считать наиболее пригодным для решения поставленной задачи.

Такой вывод имеет важное значение для обоснования преимуществ рассмотренного далее метода, в основу которого положен принцип построения шкал вероятностных бумаг с использованием метода наименьших квадратов для точной оценки искомых параметров.

Проверка согласия эмпирического и теоретического распределений.

После того как определены параметры теоретических распределений, необходимо принять решение о том, какой из исследуемых законов находится в наилучшем согласии с эмпирическим распределением.

Если мы уверены в достоверности всех членов выборки, а сама выборка постоянна и однородна, то согласно ГОСТ 11006—74 формальная проверка согласия эмпирического и теоретического распределений может выполняться по критерию Колмогорова, критерию χ^2 или критерию ω^2 .

Наименее трудоемкой можно считать процедуру проверки согласия по критерию Колмогорова **D** , равному наибольшей разнице теоретического и эмпирического распределений вероятностей. Полученную величину сравнивают с допустимым значением $\mathbf{D_n}$ при заданной доверительной вероятности **p**. Если фактическое значение **D** не превышает допустимого значения $\mathbf{D_n}$, то согласие признают хорошим.
Значения $\mathbf{D_n}$ при заданной доверительной вероятности **p** находят по специальным табулированным функциям [].
При отсутствии под рукой этих таблиц можно применить следующую формулу (записана в формате MathCAD 2000)

$$D_n := \frac{0.805 + 0.177 \cdot \ln\left(\dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{1}{p}\right)}\right)}{\sqrt{n+1}} \qquad (13)$$

где **n** - объем выборки, **p**- доверительная вероятность.
Эта формула получена нами путем корреляционного анализа табулированных функций для критерия Колмогорова при очень высоком коэффициенте корреляции $R_{xy} = 0{,}999$.
Обеспечивается практически полное совпадение результатов расчета по данной формуле и таблицам [16].
Для решения обратной задачи из формулы следует такая зависимость

$$p := \exp\left[-\exp\left[-\left(5.65 \cdot D_n \cdot \sqrt{n+1} - 4.548\right)\right]\right] \qquad (14)$$

Использование критерия Колмогорова показывает, что при относительно небольших объемах выборки (<50), критерий $\mathbf{D_n}$ принимает весьма большие значения (0,1 - 0,4), что снижает достоверность оценки согласия (см. рис. 5). Поэтому чаще всего по критерию Колмогорова подтверждается согласие даже явно несовместимых распределений.
Имеет свои недостатки и критерий Пирсона (χ^2)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - M_i)^2}{M_i}, \qquad (15)$$

где $\boldsymbol{k}$— число интервалов разбиения; $\boldsymbol{m_i}$, — число отказов, попавших в $\boldsymbol{i}$-й интервал; $\boldsymbol{M_i}$ — математическое ожидание числа отказов в $\boldsymbol{i}$-м интервале при принятой гипотезе.

Значения m_i, и M_i определяются через эмпирические и теоретические плотности вероятности в интервалах.

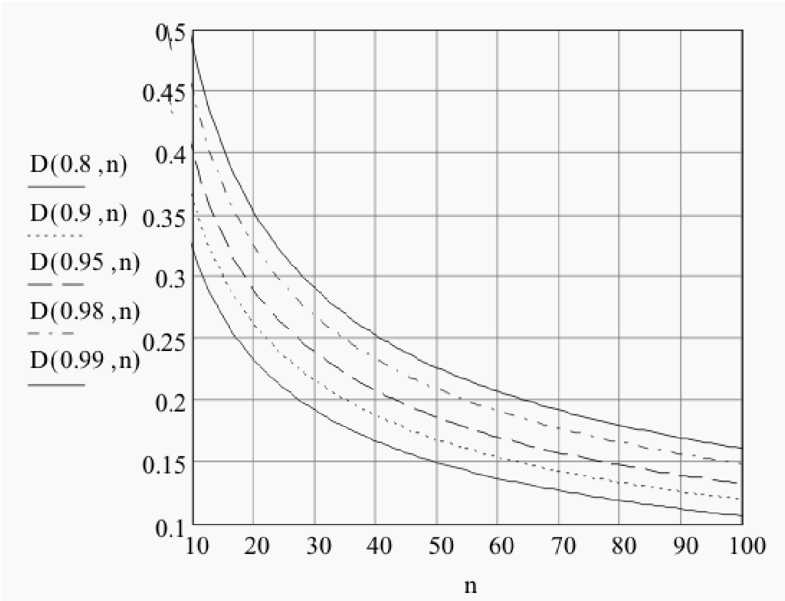


Рис. 5. График для определения критерия Колмогорова

Оценка согласия выполняется путем сравнения полученного значения χ^2 с табличным значением при заданной доверительной вероятности ***p***.
Опыт статистической обработки информации о выборках различного объема позволяет отметить, что эмпирические распределения плотности вероятности как правило имеют очень большой разброс по интервалам, что приводит к увеличению критерия χ^2 и отбрасывания гипотезы о согласии даже таких распределений, которые находятся в явно хорошем согласии, если судить по графикам накопленных частот.
В литературе по надежности [15] утверждается, что наиболее мощным критерием является величина $n\omega^2$, которая характеризуется средне квадратичным отклонением накопленных частот от теоретического распределения и так же оценивается с использованием доверительной вероятности по специальным таблицам в ГОСТ 11.006-74. Для вычисления этого критерия в работе [15] приводиться такая зависимость, которая, по-видимому, относится к вариационному , а не интервальному ряду.

$$n\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left[F(x_i) - \frac{2i-1}{2n}\right]^2 \qquad (16)$$

где n - число реализаций, $F(x_i)$ - накопленная частость (вероятно - теоретическая).
Признавая преимущества критерия $n\omega^2$ по сравнению с критерием χ^2 следует отметить, что далее будет предложен еще более мощный критерий

проверки согласия эмпирических и теоретических распределений вероятности, который определяется одновременно с расчетом параметров распределения. При этом не требуется задаваться доверительной вероятностью, субъективный выбор которых обесценивает саму идею проверки согласия распределений по критериям Колмогорова, χ^2, ω^2 и другим критериям.

Методика оценки критериев согласия и параметров теоретического и эмпирического распределений с применением метода наименьших квадратов

Классификация выборок и вариационных рядов

Рассматриваемая здесь методика разрабатывалась с целью оценки и обеспечения надежности судовой техники на всех стадиях ее жизненного цикла.

Тем не менее эта методику можно считать универсальной, поскольку она позволяет оценивать точность и достоверность результатов любых измерений и наблюдений с использованием особого подхода к выполнению основных операций статистической обработки информации.

Прежде всего рассмотрим важный вопрос о классификации выборочных совокупностей или вариационных рядов, с которыми приходиться иметь дело в различных сферах науки и техники.

Это имеет большое значение как для теории, так и практики статистической обработки информации.

Выборки можно классифицировать по следующим признакам:

- по размаху (коэффициенту вариации);
- по объему;
- по степени усеченности (для временных рядов);

<u>Классификация выборок в зависимости от их размаха</u> или, точнее, от коэффициента вариации рассматривается здесь прежде всего для снятия ряда противоречий между теорией вероятности и практикой ее применения.

Например, согласно догмам теории вероятности:

- основным законом распределения считается нормальный закон (Гаусса);
- сумма независимых случайных величин распределена нормально;
- для оценки размаха выборки справедливо правило «трех сигм». и др.

Все эти положения безусловно справедливы при исследовании очень «узких» выборок с малыми коэффициентами вариации V = 0,05.... 0.15. По-видимому классики вероятностных теорий, просто не представляли себе, что однородные выборки результатов измерений или испытаний могут иметь больший размах. Это подтверждается и ранней литературой по надежности техники. Так в методиках расчета запаса усталостной прочности рекомендуется принимать допустимую вероятность в указанных выше пределах [11]. Такие же величины рекомендованы были и для изучения изнашивания в узлах трения [11].

Однако многолетний опыт статистических исследований в разных отраслях промышленности выявили совсем другие закономерности.

Даже при лабораторных испытаниях образцов на усталостную прочность [7] не удается получить коэффициент вариации менее 0,3.

По данным НАТИ [6], средние значения коэффициентов вариации износостойкости основных деталей и сопряжении тракторных двигателей, полученных при испытаниях в полевых условиях, составляют $V = 0{,}36...0{,}50$.

По данным испытаний в Германии 515 тракторов 11 марок, средний коэффициент вариации ресурса составил 0,49.

Ориентировочные значения коэффициента вариации ресурса автомобильных двигателей до первого капитального ремонта 0,16...0,36, между капитальными ремонтами—0,50...0,75.[6]

При изучении износов различных деталей и узлов судовых дизелей флота рыбной промышленности выявлены аналогичные значения коэффициента вариации - от 0,3 до 0,7 [4].

В некоторых случаях при особо нестабильных условиях эксплуатации или испытаний коэффициент вариации может достигать единицы.

Таблица 4

Номер группы	Коэффициент вариации	Возможные законы распределения и их параметры
1.	0,05....0,30	Нормальный и Вейбулла при b ≤ 3
2.	0,30....0,45	Логнормальный, равномерный и Вейбулла при b = 2,4....3,7
3.	0,45....0,6	Логнормальный, Вейбулла при b = 1.7....2,4, Релея
4.	0,60....0,80	Логнормальный, Вейбулла при b = 1,26....1.7
5.	0,80....1,00	Логнормальный, Вейбулла при b = 1....1,26

Причины столь большого рассевания членов выборок вполне объяснимы - они связаны с реальной нестабильностью качества объектов и средств измерений, а так же технологических и эксплутационных факторов.

Исходя из практического опыта статистических исследований можно утверждать, что при добросовестных измерениях линейных размеров и других характеристик поверхности (твердости, шероховатости и др.) одинаковых деталей (даже в лабораторных условиях) коэффициент вариации может быть заметно больше величины 0,1.

Отсюда можно сделать вывод о том, что нормальный закон не всегда пригоден для исследования точности изготовления продукции, поскольку при коэффициенте вариации большем 0,33 вероятность события заметно отличается от нуля уже при нулевой наработке.

Для последующего выбора закона распределения классификацию выборок по их размаху можно условно разбить на четыре группы (см. табл. 4).

Классификация выборок в зависимости от их объема предназначена для выбора метода построения эмпирического распределения. С этой точки зрения выборки основных событий можно несколько условно разделить на две группы - малые при объеме $N < 20$ и большие при объеме $N \geq 20$.

При малых выборках эмпирическое распределение вероятностей строится по точкам вариационного ряда «от отказа до отказа» без построения гистограммы. Это связано с невозможностью обеспечить требования к попаданию в интервалы достаточного числа реализаций при малом объеме выборки.

При больших выборках эта проблема снимается и эмпирическое распределение образуется путем построения интервального вариационного ряда.

Классификация выборок в зависимости от степени их усеченности.

Такая классификация содержит две группы выборок:

- простые (нецензурированные),
- цензурированные, которые в свою очередь включают в себя две подгруппы - усеченные и многократно усеченные выборки.

Простая (не цензурированная) выборка, состоит только из свершившихся событий, например, замеров или отказов. При этом суммарное количество распределенных реализаций равно объему выборки.

Цензурированная выборка состоит из двух выборок, одна из которых является выборкой свершившихся событий (например, отказов), а другая - еще не свершившихся событий (цензурирований).

У простой усеченной выборки (иногда ее называют незавершенной) все наработки до цензурирований больше максимальной наработки до свершившегося события. Иначе говоря рассматривается случай когда еще не все объекты отказали при общем начальном моменте времени.

Для многократно усеченных выборок характерно, что наработки объектов, сохранивших работоспособность (цензурирований) к моменту окончания испытаний, могут быть как больше, так и меньше наработок отказавших объектов.

Построение эмпирических распределений

Для простой малой выборки вероятность безотказной работы для каждой i-ого члена вариационного ряда определяется по элементарной формуле

$$P_i = 1 - \frac{i}{N} \qquad (17)$$

При исследовании простой большой выборки была установлена формула для оценки вероятности P_j для середины каждого j - го интервала.

$$P_j = \left[1 - \frac{(\sum_0^M n_j) - 0{,}5 n_j}{N} \right] \qquad (18)$$

Для того, чтобы можно было строить эмпирические распределения для любых цензурированных выборок предложена и реализована идея использования в качестве первичного параметра безразмерной интенсивности отказов λ_j, которая равна отношению частоты отказов в интервале к количеству еще не отказавших (живых) объектов.
В итоге получены такие зависимости.
Для малой цензурированной выборки при расчете по точкам имеем

$$P_i = \prod_{i=0}^{i} \frac{(N + N1) - (i + n_i)}{(N + N1) - (i + n_i) + 1} \qquad (19)$$

Для большой цензурированной выборки при расчете по середине каждого интервала сначала определяем безразмерную интенсивность отказов

$$\lambda_j = \frac{n_j}{(N + N1) - \sum_{j=0}^{j} (n_j + n1_j) + \frac{n_j + n1_j}{2}} \qquad (20)$$

а затем - вероятность безотказной работы

$$P_j = P_{j-1} \frac{1 - 0{,}5\lambda_{j-1}}{1 + 0{,}5\lambda_j} = \prod_{j=0}^{j} \left(\frac{1 - 0{,}5\lambda_{j-1}}{1 + 0{,}5\lambda_j} \right) \qquad (21)$$

Те же самые параметры при расчете по концу интервала определяются по формулам

$$\lambda_j = \frac{n_j}{(N + N1) - \sum_{j=0}^{j} (n_j + n1_j)} \qquad (22)$$

$$P_j = \prod_{j=0}^{j} \left(\frac{1}{1 + \lambda_j} \right) \qquad (23)$$

Отметим, что для программирования удобнее использовать вариант расчета по концу интервала. При этом целесообразно при дальнейшем расчете параметров распределений отбрасывать последний интервал, если для него вероятность $P_N = 0$ (это характерно для простых нецензурированных выборок).

Построение эмпирического распределения путем расчета эмпирических значений интенсивности событий λ_j можно считать универсальным методом и все описанные выше варианты являются его частными случаями.

Определение параметров распределений и проверка согласия с эмпирическим распределением методом наименьших квадратов

Оценку параметров теоретических распределений мы производим с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Таким методом определяются параметры масштаба ***b*** и положения ***a*** двухпараметрических законов распределений: нормального (Гаусса), логарифмически нормального, Вейбулла, равномерного и др. с одновременной проверкой их согласия с опытными распределениями по коэффициенту корреляции.

Установлено, что применение коэффициента корреляции в качестве критерия согласия имеет явные преимущества перед критерием Пирсона, Колмогорова и др.

Ниже показано как решается эта задача для распределения Вейбулла, интегральная функция которого имеет вид

$$P(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right] \qquad (24)$$

Решение задачи состоит из следующих этапов:

1. Преобразование (анаморфоза) координат исследуемой эмпирической зависимости с целью ее приведения к линейному виду

$$y = A + Bx \;, \qquad (25)$$

где x = f(t) и *y = f(P)* – функции анаморфозы, *A* и *B* – постоянные уравнения регрессии.

В данном случае применяется следующая анаморфоза:

$$x_j = \ln(t_j),$$
$$y_j = \ln\frac{1}{\ln\frac{1}{P_j}}. \qquad (26)$$

2. Далее следуют стандартные процедуры МНК по расчету коэффициента корреляции R_{xy}, относительных погрешностей δ_x и δ_y, постоянных A и B уравнения регрессии.

$$R_{xy} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_x S_y}};$$
$$\delta_y = \sqrt{\frac{(1-r_{xy}^2)S_y}{N-1}};\ \delta_x = \sqrt{\frac{(1-r_{xy}^2)S_x}{N-1}}; \qquad (27)$$
$$B = R_{xy}\sqrt{\frac{S_y}{S_x R_{xy}^2}};$$
$$A = Y_{cp} - BX_{cp}.$$

В этих формулах использованы средние значения X_c и Y_c, вариации S_x и S_y, которые вычисляют по осям координат, а также ковариации S_{xy}.
Наш метод отличается от общепринятого МНК лишь тем, что здесь используется центральная корреляция при которой полученная функция полностью обратима.

3. Оценивается согласие теоретического и эмпирического распределений по абсолютной величине коэффициента корреляции $|R_{xy}|$, который в этой задаче имеет знак минус. Чем ближе полученное значение к единице, тем выше степень согласия этих распределений.
   Хорошему согласию соответствуют значения $|R_{xy}|$ = 0,98...0.999. При интервальном построении эмпирического распределения обычно наблюдается более высокие значения $|R_{xy}|$. В рассматриваемой методике предусмотрено одновременное вычисление параметров сразу для всех законов распределений. На ПЭВМ эта процедура занимает мгновения времени. После этого остается выбрать закон с наиболее высоким значением для дальнейшего применения
4. Параметры формы ***b*** и масштаба ***a*** распределения Вейбулла определяются по формулам

$$b = -B$$
$$a = \exp\left(-\frac{A}{B}\right) \qquad (28)$$

5.Зная параметр масштаба b можно рассчитать коэффициент вариации

$$V = \frac{\sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{b}\right)-\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right)^2}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right)} \qquad (29)$$

и коэффициент K(b) - по формуле (11), который позволяет найти математическое ожидание для исследуемой выборки (в том числе и для цензурированной)

$$t_s = aK(b) \qquad (30)$$

6. В заключении определяется гамма- процентный ресурс

$$R_\gamma = a\left(\ln\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right)^{\frac{1}{b}} \qquad (31)$$

и выполняется построение графиков теоретических распределений, совмещенные с опытными точками.

Напомним, что гамма- процентный ресурс это наработка с начала эксплуатации объекта до наступления его предельного состояния с вероятностью γ %.

Из представленного примера видно, что методика позволяет определять статистические характеристики выборки (два первых момента) даже в том случае, если выборка является цензурированной или незавершенной.

В ответственных случаях может быть учтены доверительные границы исследуемых показателей с учетом среднеквадратичной ошибки δ_y, которая зависит от объема выборки.

Расчеты параметров распределения для других законов распределений отличаются от приведенных выше расчетов лишь видом аппроксимирующих функций или, иначе говоря, координатами вероятностной сетки.

В табл. 5 зависимости для приведения координат основных законов распределений к линейному виду.

Таблица 5

Закон	Y	X	b	a
Нормальное	*U(P(t))*	*t*	*1/A*	*-A/B*
Логнормальное	*U(P(t))*	*ln(t)*	*-1/B*	*exp(-A/B)*
Вейбулла	$\ln\frac{1}{\ln\frac{1}{P(t)}}$	*ln(t)*	*-B*	*exp(-A/B)*
Равномерное	P(t)	*t*	$\frac{1}{(2A-1)\sqrt{3}}$	$\frac{-(2A-1)}{2B}$

Примечание. *U(P(t))* - квантиль для значения *P(t)*

Программное обеспечение оценки критериев согласия и параметров теоретического и эмпирического распределений

В наше время общей компьютеризации создание любых расчетных методов не имеет практического смысла без соответствующего программного обеспечения. Как уже было отмечено, эту задачу целесообразно решать на основе современных математических систем в среде Windows.
Ниже приведен фрагмент программы с примером построения эмпирического распределения и расчета параметров распределения Вейбулла в редакторе MathCAD.

«Пример.
Исходные данные.
Дана выборка случайных чисел наработок до отказа t объемом N=24 (выборка приведена в связанном файле электронных таблиц EXCEL).
Задание.
1. Построить гистограммы и эмпирические распределения вероятности безотказной работы, плотности распределения вероятности и интенсивности отказов
2. Определить параметры распределения Вейбулла и рассчитать γ-процентный ресурс.
3. Построить теоретические распределения вероятности

Решение задачи
1. Построение гистограммы и эмпирические распределения вероятности безотказной работы, плотности распределения вероятности и интенсивности отказов

$\mathrm{lower} := \mathrm{floor}(\min(t0))$ $\quad \mathrm{upper} := \mathrm{ceil}(\max(t0))$ $\quad N := \mathrm{length}(t0)$ $\quad N = 24$ $\quad \mathrm{bin} := \mathrm{ceil}(5\cdot\log(N))$

$h := \frac{\mathrm{upper} - \mathrm{lower}}{\mathrm{bin}}$ $\quad j := 0..\mathrm{bin}$ $\quad n0 := \mathrm{floor}\left(\left(\frac{\mathrm{lower}}{\mathrm{bin}}\right)\right)$ $\quad \mathrm{bin} = 7$ $\quad g = 2$

$t_j := (0 + h\cdot j)$ $\quad i := 0..\mathrm{bin} - g$ $\quad \beta := 0.85$

$f := \mathrm{hist}(t, t0)$ $\quad f1 := \mathrm{hist}(t, t1)$ $\quad t := t + h$ $\quad n0 = 0$

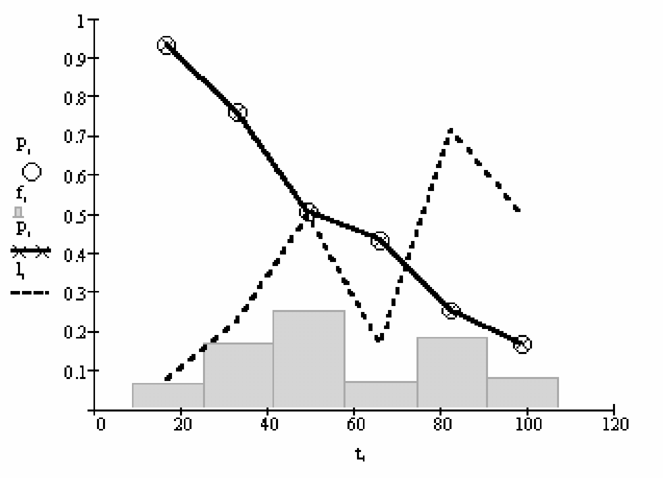
Эмпирические безразмерные величины интенсивности отказов, вероятности безотказной работы и плотности вероятности определяются по следующим алгоритмам

$$l_i := \frac{f_i}{(N + N1) - \sum_{i=0}^{i} \left(f_i + f1_i\right)} \qquad P_i := \prod_{i=0}^{i} \frac{1}{1 + l_i} \qquad f_i := l_i \cdot P_i$$

По приведенным выше формулам образуется таблица в виде матрицы М и автоматически строится график эмпирического распределения

M =

i	tn	ts	t_i	u_i	q_i	λ_i	p_i	$f2_i$
0	0	8.214	16.429	2	0	0.074	0.931	0.069
1	16.429	24.643	32.857	5	0	0.227	0.759	0.172
2	32.857	41.071	49.286	7	1	0.5	0.506	0.253
3	49.286	57.5	65.714	2	0	0.167	0.433	0.072
4	65.714	73.929	82.143	5	0	0.714	0.253	0.181
5	82.143	90.357	98.571	2	1	0.5	0.169	0.084



2. Определение параметров распределения Вейбулла и расчет γ-процентный ресурс.

Для получения линейного уравнения регрессии принимаем

$z_i := \ln(t_i)$ и $y_i := \ln\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{P_i}\right)}\right)$

Рассчитываем следующие параметры с применением метода наименьших квадратов

Коэффициент корреляции $\quad Rxy := \mathrm{corr}(z, y) \quad Rxy = -0.995$

Показатель формы $\quad b := -\left(Rxy \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{var}(y)}{\mathrm{var}(z) \cdot Rxy^2}}\right) \quad b = 1.796$

Показатель масштаба $a := \exp\left(\frac{\mathrm{mean}(y) + b\cdot\mathrm{mean}(z)}{b}\right)$ $a = 68.647$

Коэффициент $Kb := \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)$ $Kb = 0.889$

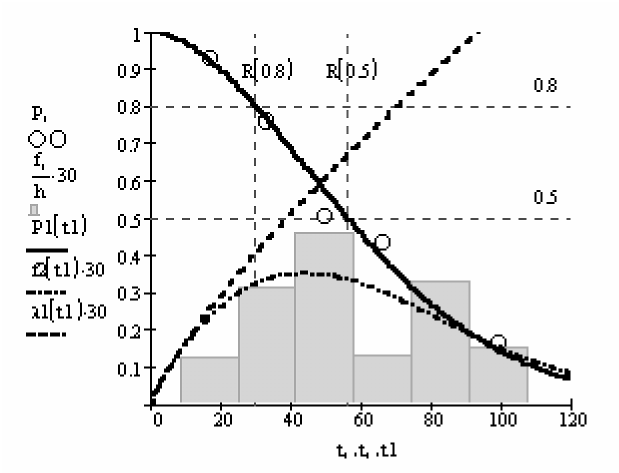
Средний ресурс $Rs := a\cdot Kb$ $Rs = 61.054$

Коэффициент вариации $V1 := \frac{\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - Kb^2}}{Kb}$ $V1 = 0.576$

γ-процентный ресурсдля $\gamma := 0.5$ $R(\gamma) := a\cdot\ln\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\left(\frac{1}{b}\right)}$ $R(\gamma) = 55.973$

3. Строим графики функций распределения Вейбулла в сравнении с опытным распределением

$P1(t1) := \exp\left[-\left(\frac{t1}{a}\right)^b\right]$ $\lambda 1(t1) := \frac{b}{a}\cdot\left(\frac{t1}{a}\right)^{(b-1)}$ $f2(t1) := P1(t1)\cdot\lambda 1(t1)$



Расчет закончен.»

Полная программа содержит алгоритмы таких же расчетов и для других законов, которые моментально выполняются после ввода исходных данных. После этого остается просмотреть результаты расчета R_{xy} и выбрать закон с его максимальным значением.

В приведенном примере матрица базы данных получается путем генерации случайных чисел. Редактор MathCAD позволяет использовать удаленные базы данных, например, в электронных таблицах EXCEL.

Если внимательно рассмотреть приведенный выше, то можно убедиться в преимуществах программирования в системе MathCAD. Запись программы внешне выглядит почти как простая запись необходимых формул и алгоритмов. При этом комментарии к расчетам записываются так же как в текстовом редакторе Word.

Графики (как двухмерные, так и трехмерные) строятся автоматически. При этом не требуется решать вопросы масштаба по осям координат.

В систему программирования встроено большое число специальных функций. Например в раздел по теории вероятности включено 17 теоретических распределений. Для всех них предусмотрена генерация случайных чисел.
Мощные средства заложены в программу для регрессивного и дисперсионного анализа.
Целесообразно обратить внимание на сам расчет, который приведен в примере. Там рассмотрена относительно небольшая по объему выборка (N = 24), для которой применена интервальная статистическая обработка. При этом получены вполне корректные результаты определения параметров распределения и проверки согласия теоретического и эмпирического распределений. О хорошем согласии можно судить по высокому значению $|R_{xy}| = 0{,}995$, а так же непосредственно по графику, где показано прохождение теоретической кривой среди опытных точек (кружков).
В то же время хорошо видно насколько нестабильны по интервалам значения эмпирической плотности вероятности. Ясно, что в таком случае (достаточно характерном) применять критерий χ^2 недопустимо.
Неудобно использовать для той же цели и другие критерии согласия из-за субъективности выбора доверительных вероятностей.
Приведенные в этой работе обоснования метода оценки параметров распределений и критериев согласия распределений вероятностей позволяют рекомендовать этот метод для решения более широкого круга задач обеспечения качества продукции.

Литература

1. Брандт З., Статистические методы анализа наблюдений, Перевод с английского Г. А. Погребинского, Под редакцией В. Ф. Писаренко, Издательство «МИР», Москва, 1975. — 312 с.
2. ГОСТ 17509—72. Надежность изделий машиностроения. Система сбора и обработки информации. Методы определения точечных оценок показателей надежности по результатам наблюдений.
3. ГОСТ 17510—72. Надежность изделий машиностроения. Система сбора и обработки информации. Планирование наблюдений.
4. Ефремов Л. В., Черняховский Э. Р. Надежность и вибрация дизельных установок промысловых судов.—М.: Пищевая промышленность, 1980.—232 с.
5. Ефремов Л.В. Практика инженерного анализа надежности судовой техники. – Л.: Судостроение, 1980. – 178 с.
6. Ждановский Н. С., Николаенко А. В. Надежность и долговечность автотракторных двигателей.—2-е изд., перераб. и доп.—Л.: Колос. Ленингр. отд-ние, 1981. — 295 с., ил.

7. Методика усталостных испытании. Справочник. Школьник Л.М. М.- «Металлургия». |1978. — 304 с.
8. Методика расчета нормативных показателей надежности судовых технических средств. РД 15-127-90. – Л.: Гипрорыбфлот, 1990. – 81 с.
9. Методика статистической обработки информации о надежности технических изделий на ЭЦВМ. М. : Изд-во стандартов, 1978. 56 с.
10. Расчет точности машин и приборов/В. П. Булатов, И. Г. Фридлендер, А. П. Баталов и др. Под общ. ред. В. П. Булатова и И. Г. Фридлендера. — СПб.: Политехника, 1993. — 495 с.: ил.
11. Решетов Д. Н. и др. Надежность машин: Учеб. пособие для машиностр. спец. вузов/Д. Н. Решетов, А. С. Иванов, В. 3. Фадеев; Под ред. Д. Н. Решетова.—М.: Высш. шк., 1988.—238 с.: ил.
12. Справочник по надежности. Том I (Перевод с английского Ю.Г. Епишина и Б.А. Смиренина. Под редакцией Б. Е. Левина). Из—тво « Мир» Москва, 1969, — 340 с.
13. Справочник по надежности. Том II (Перевод с английского П.К. Горохова. Под редакцией Б. Е. Бердичевского). Из-тво « Мир» Москва, 1970, — 305 с.
14. Справочник по надежности. Том III (Перевод с английского Ф.С. Соловейчика. Под редакцией Б. Е. Бердичевского). Из-тво « Мир» Москва, 1970, —376 с.
15. Хазов Б. Ф., Дидусев Б. А. Справочник по расчету надежности машин на стадии проектирования. — М.: Машиностроение. 1986. — 224 с,, ил. (Основы проектирования машин).
16. Шор Я.Б., Кузьмин Ф.И. Таблицы для анализа и контроля надежности. М., Изд-во «Советское радио», 1968, 288 с.